

隣接行列に関する量子ウォークとベッセル関数

齋藤 正顕 (工学院大学)*

ドレスト光子 (DP) の量子ウォーク (QW) モデルが天津先生 [4], 瀬川氏によって提案されています. これに関して, 天津-瀬川-結城 [5, 6, 7] らによる数値計算により, QW モデルの挙動と実験の整合性が確認・報告されております. さて今回は, 今野先生の本 [2] の第II部や論文 [1] に従って,

$$|\Psi(t)\rangle = U(t) |\Psi(0)\rangle, \quad U(t) = e^{itA/2}$$

によって定まるグラフ X 上の隣接行列に関する連続時間量子ウォークを考察します. A は X の隣接行列とします. [2] の第II部では, グラフ X が1次元格子 \mathbf{Z} , 有限サイクルグラフ C_N , 正則木などの場合の量子ウォークが紹介されています. そこでは, たびたび第1種ベッセル関数 (J -ベッセル関数) が登場するので不思議に思っていたのですが, その理由に気が付きました. 当たり前に思う方も多いと思いますが, せっかくなので一つの視点として書いておきたいと思えます. さて, $iA = iB + (iB)^{-1}$ を満たす行列を B とすると, J -ベッセル関数の母関数の等式 $\exp\left(t \cdot \frac{ix + (ix)^{-1}}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)(ix)^n$ を用いて, ユニタリ行列 $U(t)$ は形式的に

$$e^{itA/2} = \exp\left(t \cdot \frac{iB + (iB)^{-1}}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(t) B^n$$

と表されます. [1] によると, $X = \mathbf{Z}$ (1次元格子) のときは, $e^{itA/2}$ の (l, m) 成分は,

$$(e^{itA/2})_{l,m} = i^{|l-m|} J_{|l-m|}(t), \quad (l, m) \in \mathbf{Z}^2, t \geq 0$$

となります. このとき, $e^{itA/2}$ の列ベクトルから $|\Psi(t)\rangle$ の具体的な形が分かり, 確率分布も分かるというストーリーになっています. 実際 [1] によると, サイト $k \in \mathbf{Z}$ で観測される walker の確率は $P(k, t) = \langle \Psi(k, t) | \Psi(k, t) \rangle = J_k(t)^2$ となります. 1次元格子以外のグラフでも行列 A^n (あるいは B^n) の振る舞いが分かれば, このグラフ上のモデルの確率分布が分かることが期待されます. あるいは, A の固有値と固有ベクトルが明示的に分かる場合は, 初期状態を固有ベクトルの1次結合で表すことにより確率分布が分かります. 量子ウォークモデル以前のドレスト光子の理論 [3] にもドレスト光子とフォノンの結合定数 $\chi = 0$ の場合のドレスト光子の期待値の式に, J -ベッセル関数が現れます ([8] も参照). これは, シリコン結晶をグラフとみて, ドレスト光子のダイナミクスを量子ウォークで説明することができる証左に他ならないように思えます.

参考文献

- [1] N. Konno, *Limit theorem for continuous-time quantum walk on the line*, Phys. Rev. E (3) 72 (2005), no. 2, 026113, 7 pp.
- [2] 今野紀雄, 「量子ウォークの数理」, 産業図書, 2008.
- [3] 天津元一, 「ドレスト光子 –光・物質融合工学の原理–」, 朝倉書店, 2013.
- [4] M. Ohtsu, *A Quantum Walk Model for Describing the Energy Transfer of a Dressed Photon*, preprint, 2021.

* e-mail: saito.seiken@cc.kogakuin.ac.jp

- [5] 大津元一, 瀬川悦生, 結城謙太, 「量子ウォークモデルによるドレスト光子エネルギー移動の数値計算」, 2022年第83回応用物理学会秋季学術講演会.
- [6] 大津元一, 瀬川悦生, 結城謙太, 齋藤正顕, 「不純物原子対でのドレスト光子の閉じ込めの量子ウォーク計算」, 2023年第70回応用物理学会春季学術講演会.
- [7] 大津元一, 瀬川悦生, 結城謙太, 齋藤正顕, 「シリコン発光素子の光子ブリーディングの量子ウォーク解析」, 2023年第84回応用物理学会秋季学術講演会.
- [8] 齋藤正顕, 「ドレスト光子の個数の期待値と量子ウォーク」, オフシエル科学フォーラム, 2022.